

---

# ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2025-2026

## Série 4: Applications linéaires et matrices

---

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) connaître et manipuler les **représentations matricielles (canoniques)** des applications linéaires ;
- (O.2) calculer le **noyau** et **image** d'une application linéaire ;
- (O.3) déterminer si une application linéaire est **injective**, **surjective**, ou **bijective** ;
- (O.4) connaître le **lien entre SEL et équations matricielles**, et l'utiliser pour **calculer des solutions des équations matricielles**.

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- représentation matricielle (ou matrice) canonique d'une application linéaire
- noyau d'une application linéaire
- image d'une application linéaire

---

## Noyau d'exercices

### 1.1 Applications linéaires et matrices

#### Exercice 1 (Produit entre une matrice et un vecteur)

Calculer  $A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)$ , avec

(a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 3$  ;

(b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1 = -1$  et  $\alpha_2 = 1$ .

#### Exercice 2 (Noyau et image d'applications linéaires associés à des matrices)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si  $\mathbf{w}$  est dans  $\text{Ker}(A)$  et/ou dans  $\text{Im}(A)$ .

**Exercice 3 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité I)**

**Rappel de la théorie**

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices précédentes sont injectives, surjectives ou bijectives.

**Exercice 4 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité II)**

(a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 4z \\ 5x - 4y + 7z \\ 3x - 2y + 3z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$$

pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

- (b) Déterminer si l'application linéaire  $T$  est injective, surjective ou bijective.
- (c) Déterminer ensuite le noyau  $\text{Ker}(T)$  de  $T$ , i.e. le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  donné par

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$



**Exercice 5 (Surjectivité et injectivité des endomorphismes)**

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire.

- (a) Montrer que si  $T$  est surjective, alors  $T$  est aussi injective.
- (b) Montrer que si  $T$  est injective, alors  $T$  est aussi surjective.

**1.2 Systèmes linéaires et équations matricielles**

**Exercice 6 (Forme paramétrique vectorielle)**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Écrire l'ensemble solution de l'équation  $Ax = \mathbf{0}$  sous forme paramétrique vectorielle.

**Exercice 7 (Représentations vectorielles, équations matricielles et décomposition en solution particulière et homogène)**

Considérons le SEL

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6, \end{cases}$$

et soit  $A$  la matrice carrée de taille 3 formée avec les coefficients des variables, avec le même ordre que dans le système précédent.

- (a) Écrire le système de façon équivalente comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $A$ .
- (b) Écrire le système sous forme matricielle  $Ax = \mathbf{b}$ .
- (c) Résoudre l'équation matricielle  $Ax = \mathbf{b}$ .
- (d) Écrire l'ensemble des solutions sous forme paramétrique vectorielle,
- (e) Écrire toutes les solutions de  $Ax = \mathbf{b}$ , si elles existent, sous la forme  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$ , où  $\mathbf{p}$  est une solution particulière du système, et  $\mathbf{v}$  est la solution générale du système homogène



**Pour compléter la pratique**

**2.1 Applications linéaires et matrices**

**Exercice 8 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité III)**

Calculer la matrice associée à l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix},$$

pour tous  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ , et déterminer si elle est injective, surjective ou bijective.

**Exercice 9 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité IV)**

On considère les applications linéaires suivantes :

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ;

(b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$ , pour tous  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  ;

(c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ , pour tous  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  ;

(d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ , pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ;

(e)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ , pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

Dans tous les cas, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

**2.2 Systèmes linéaires et équations matricielles**

**Exercice 10 (Décomposition en solution particulière et homogène)**

Considérons les SEL

(a) 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6, \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Pour chaque SEL, l'écrire sous la forme matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , et écrire ensuite toutes les solutions, si elles existent, sous la forme  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$ , où  $\mathbf{p}$  est une solution particulière du système, et  $\mathbf{v}$  est la solution générale du système homogène.

**Exercice 11 (Compatibilité)**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  pour lesquels  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est compatible.

**Exercice 12 (Compatibilité avec paramètres)**

Déterminer les valeurs des paramètres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = a, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = b, \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = c, \end{cases}$$

possède des solutions et les déterminer.



### Bonus : un exercice plus compliqué

#### Exercice 13 (Formes échelonnées réduites et indépendance linéaire)

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite de la matrice  $A$  dans les cas suivants :

- (a)  $A$  est une matrice carrée de taille 3 avec des colonnes linéairement indépendantes ;
- (b)  $A$  est une matrice de taille  $4 \times 2$  telle que la deuxième colonne de  $A$  n'est pas un multiple de la première colonne.
- (c)  $A$  est une matrice de taille  $4 \times 3$  telle que les deux premières colonnes de  $A$  forment un ensemble libre de  $\mathbb{R}^4$  et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières colonnes de  $A$ .